BREVE HISTORIA DEL INFINITO

Francisco Javier Pérez González

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Septiembre de 2021

Índice

1. Breve historia del infinito

Es conocida la exclamación de David Hilbert *¡El infinito! Ninguna cuestión ha conmovido tan profundamente el espíritu del hombre*. Es verdad, el infinito atrae poderosamente nuestra imaginación. Es difícil imaginar que el tiempo tuviera un comienzo y también que el espacio sea finito, porque no podemos pensar en una frontera para el espacio tras de la cual no exista más espacio, ni un origen para el tiempo antes del cual no hubiera tiempo. Cualquier respuesta a estas preguntas conduce siempre a nuevas preguntas. Un error típico consiste en creer que si algo fuera infinito debería contener todas las cosas, algo así como el Aleph borgiano. Matemáticamente, es claro que no tiene por qué ser así: los números pares son infinitos y no son todos los números. Algo infinito tampoco tiene por qué ser necesariamente muy grande. El Aleph de la narración de Borges es una pequeña esfera, un conjunto fractal contiene infinitas copias de sí mismo, el veloz Aquiles permanece corriendo sin alcanzar jamás a la tortuga que le lleva unos pocos metros de ventaja. . . .

1.1. La idea de infinito en la filosofía y la matemática Griegas

1.1.1. Las aporías de Zenón de Elea

¡Zenón, cruel Zenón, Zenón de Elea!
Me has traspasado con la flecha alada.
Que, cuando vibra volando, no vuela.
Me crea el son y la flecha me mata.
¡Oh sol, oh sol! ¡Qué sombra de tortuga
para el alma: si en marcha Aquiles, quieto!
Paul Valery

Un griego llamado Zenón, del que se sabe muy poco y de forma indirecta a través del *Parménides* de Platón, cuyo nacimiento se fecha hacia el año 490 a.C en la ciudad de Elea en el sur de Italia, y que fue discípulo de Parménides, sigue manteniendo desde hace 2300 años su permanente desafío a la razón.

Te recuerdo que, según Parménides, el ser es necesariamente uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable. Los cambios, transformaciones y multiplicación de los seres, son meras apariencias a las cuales no responde realidad alguna. La filosofía de Parménides fue muy criticada porque choca con nuestras creencias más básicas sobre la realidad.

Zenón ideó sus paradojas o aporías (proposiciones sin salida lógica) para desacreditar a quienes negaban las ideas de Parménides, y afirmaban la realidad del cambio y la pluralidad de los seres. Aristóteles califica a Zenón de “inventor de la dialéctica”, una elaborada forma de razonamiento que consiste en probar al oponente que de sus ideas se deducen consecuencias inaceptables. Los argumentos de Zenón son realmente del tipo “reducción al absurdo”: se acepta provisionalmente una hipótesis y, razonando correctamente a partir de ella, se llega a una conclusión inaceptable, lo que obliga a rechazar la hipótesis inicial.

Vamos a exponer, en lenguaje actual, tres de las paradojas de Zenón que van dirigidas contra las dos teorías del movimiento sostenidas en la antigüedad, las cuales dependen, claro está, de la supuesta naturaleza del tiempo y del espacio. Debes tener en cuenta que Zenón no niega el movimiento sino su inteligibilidad; la afirmación de que “el movimiento se demuestra andando” no refuta a Zenón, su desafío no es a la experiencia sensible sino a la razón.

Las dos primeras paradojas parten del supuesto de que el espacio y el tiempo son *infinitamente divisibles* y el movimiento continuo y uniforme.

La dicotomía.

> Para que un móvil pueda llegar a un punto dado, debe recorrer primero la mitad de la distancia; pero antes de alcanzar esa mitad debe recorrer la mitad de la mitad. Y así sucesivamente, “ad infinitum”. De este modo para alcanzar completamente cualquier distancia tendría que recorrer un número infinito de divisiones, lo cual es imposible en un tiempo finito.

Aquiles y la tortuga.

> Aquiles, el de los pies ligeros, nunca alcanzará a la tortuga que avanza lentamente unos cuantos metros por delante de él. Pues cuando Aquiles alcance el punto donde estaba la tortuga, ésta ya estará un poco más adelante; y cuando de nuevo Aquiles alcance ese lugar, la tortuga habrá avanzado un poco más. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, esta ha avanzado un poco más. . . . De este modo, la tortuga estará siempre por delante de Aquiles.

Ambos argumentos están relacionados. Según la Dicotomía, para que haya movimiento debe haber un comienzo, pero no hay una distancia mínima con la que empezar; por tanto el movimiento no puede empezar, luego no hay movimiento. Según Aquiles, un móvil para alcanzar su destino debe cubrir primero la mitad de la distancia que lo separa, pero antes deberá recorrer la mitad de esa mitad, y así sucesivamente; luego debe recorrer infinitas divisiones lo cual es imposible en tiempo finito, por tanto nunca alcanzará su destino. Es decir, una vez empezado, el movimiento no puede parar.

La tercera paradoja, que se refiere a una flecha lanzada al aire, supone que el espacio y el tiempo están formados por *unidades mínimas indivisibles* y el movimiento es una sucesión de diminutos saltos consecutivos.

La flecha.

> En un instante indivisible de tiempo la flecha debe permanecer quieta, pues si se moviera el instante contendría unidades de tiempo más pequeñas en las que dicho movimiento tendría

> lugar en contra de lo supuesto. Por tanto, en cada instante la flecha está quieta y, como el tiempo se compone de instantes, la flecha está siempre quieta y el movimiento no tiene lugar.

La influencia de las aporías de Zenón en filosofía, lógica y matemáticas ha sido notable y se ha escrito y se sigue escribiendo mucho sobre ellas ([1] es una de las referencias más interesantes). Despidamos a Zenón con una cita de Borges.

> *Zenón es incontestable, salvo que confesemos la idealidad del espacio y del tiempo. Aceptemos el idealismo, aceptemos el crecimiento concreto de lo percibido, y eludiremos la pululación de abismos de la paradoja. ¿Tocar a nuestro concepto del universo, por ese pedacito de tiniebla griega?, interrogará mi lector.*
>
> J.L. Borges, “La perpetua carrera de Aquiles y la tortuga”.

1.1.2. Atomismo y divisibilidad infinita

El filósofo Anaximandro (*ca.*610 - 546 a.C.) introdujo el infinito en la filosofía Griega. Afirmó que el principio de todas las cosas existentes es el *ápeiron*. Etimológicamente *ápeiron* significa *lo sin límites*. Según Anaximandro, el *ápeiron* es infinito, porque provee la energía para que en el mundo no cese la generación y corrupción, e indeterminado, porque no es concreto y no se identifica con ninguno de los elementos agua, aire, tierra, fuego. Podemos interpretarlo como la fuente de energía primordial que garantiza la transformación y la unidad del cosmos.

En el período que separa a Zenón de Elea de Aristóteles surgió la filosofía del atomismo, iniciada por Leucipo (*ca.* 450 - 420 a.C.) y desarrollada por Demócrito (*ca.* 460 - 370 a.C.). El atomismo es una filosofía materialista que se ha interpretado como una respuesta al idealismo de la Escuela Eleática (Parménides, Zenón). Los atomistas mantienen que hay dos principios fundamentales: los átomos y el vacío. Los átomos son indivisibles e invisibles, infinitos en número y de diversas formas y tamaños, perfectamente sólidos, indestructibles y permanentes. Las substancias materiales son producidas por la unión y separación de esos átomos moviéndose en el vacío. El movimiento se produce por la reordenación de los átomos entre sí; según Aristóteles, los atomistas reducen todo cambio a un mero cambio de lugar. Los atomistas admiten la pluralidad y el movimiento y niegan la infinita divisibilidad del espacio y la materia.

El atomismo fue cuestionado por Aristóteles (384 - 322 a.C.), que realizó un análisis sistemático del continuo. Aristóteles divide las cantidades en discretas y continuas. Los números y el lenguaje hablado son discretas y las líneas, superficies, sólidos, tiempo y espacio son continuas. La respuesta a la pregunta de si una magnitud continua (un *continuo*) es permanentemente divisible en partes cada vez más pequeñas, o hay un límite más allá del cual no puede proseguirse el proceso de división, depende de la naturaleza del infinito. Aristóteles dedica el Libro III de su *Física* a un estudio sistemático del infinito. Considera que el estudio del infinito forma parte del estudio de la naturaleza, pues lo característico de ésta es el movimiento y el cambio, y el movimiento es pensado como algo continuo, y lo que es continuo es definido con frecuencia como algo infinitamente divisible.

Primero, dice Aristóteles, *"hay que examinar en general si es o no es posible que haya un cuerpo sensible infinito"*. Después del correspondiente estudio, llega a la conclusión de que *"no existe un cuerpo que sea actualmente infinito"*. Pero *"la negación absoluta del infinito es una hipótesis que conduce a consecuencias imposibles"*.

Aristóteles expone algunas razones que apoyan la creencia en la realidad del infinito y considera los distintos sentidos de dicho término. Entre las primeras: la infinitud del tiempo, la divisibilidad de las magnitudes y la infinitud de los números; entre los segundos: lo que no puede ser recorrido o se puede recorrer pero sin llegar a un término.

> Es también evidente que no es posible que lo infinito exista como un ser en acto o como una substancia y un principio. Luego lo infinito existe como un atributo.

Lo infinito es un atributo que puede predicarse de la cantidad o de determinados procesos; especialmente, los procesos de adición y de división. Aristóteles, habla en ese sentido del infinito por adición y el infinito por división o la divisibilidad infinita de un continuo.

> Ahora bien, el ser se dice o de lo que es en potencia o de lo que es en acto, mientras que el infinito es o por adición o por división. Y ya se ha dicho que la magnitud no es actualmente infinita [. . .] Nos queda, entonces, por mostrar que el infinito existe potencialmente.
>
> Pero la expresión "existencia potencial" no se debe tomar en el sentido en que se dice, por ejemplo, "esto es potencialmente una estatua, y después será una estatua", pues no hay un infinito tal que después sea en acto. Y puesto que el ser se dice en muchos sentidos, decimos que el infinito "es" en el sentido en que decimos "el día es".

Aristóteles distingue, pues, dos clases de infinito: el infinito como una totalidad completa, que llama el infinito actual y cuya existencia niega; y el infinito potencial, que concibe como un proceso secuencial de adición o de subdivisión sin final. Lo metáfora del día es muy apropiada, pues el *ser* de un día es un *estar siendo* de forma sucesiva, de manera que en ningún momento el día queda realizado plenamente como un todo. Análogamente, el infinito potencial nunca será plenamente realizado *pues no hay un infinito tal que después sea en acto*. La infinitud potencial es la forma usual en que concebimos el tiempo como una línea recta indefinidamente prolongable o la sucesión de los números que podemos ir formando por adición consecutiva de la unidad.

Esta concepción aristotélica del infinito se aceptó sin mayores cambios hasta el siglo XIX. De todas formas, Aristóteles cree que la negación del infinito actual no afecta a los matemáticos:

> Esta argumentación no priva a los matemáticos de sus especulaciones por el hecho de excluir que el infinito por adición pueda recorrerse en acto. Porque no tienen necesidad de este infinito ya que no hacen uso de él, sino sólo, por ejemplo, de una línea finita que se prolongue tanto como ellos quieran.

Sobre todo esto se ha escrito y se sigue escribiendo mucho. Más interesante para nosotros es la relación del infinito con la divisibilidad infinita del continuo.

Los atomistas negaban la divisibilidad infinita. Su argumento era que si una magnitud continua fuera dividida en todo punto, entonces no quedaría nada o solamente quedarían puntos sin extensión, porque en caso contrario el proceso de división podría proseguir. Pero, decían, si quedan puntos sin extensión, entonces no es posible recomponer la magnitud original a partir de ellos, pues por la agregación de puntos sin extensión no puede lograrse nunca una magnitud finita. Concluían que en cualquier caso la magnitud inicial se ha convertido en algo incorpóreo y, por tanto, algo que tenía existencia ha dejado de ser, lo cual, evidentemente, es un imposible.

Aristóteles defendía la divisibilidad infinita pero debía refutar el argumento atomista. Su solución es muy original, pues afirma que aunque una magnitud continua puede ser dividida en *cualquier* punto, no puede ser dividida en *todo* punto. Para Aristóteles, dividir un continuo en todos sus puntos es reducirlo a lo discreto. Mientras que un continuo tiene la propiedad de densidad, es decir, entre dos cualesquiera de sus puntos siempre hay otro punto del continuo, los puntos obtenidos, después de una división infinita actual de un continuo, serían adyacentes unos con otros, y esto implica que la propiedad de densidad se habría perdido. Pero si dividimos un continuo, lo que obtenemos son dos continuos cada uno de ellos con la propiedad de densidad. Por tanto, es imposible llegar, por divisiones sucesivas, a reducir un continuo a puntos. Así, Aristóteles afirma la divisibilidad infinita pero niega la divisibilidad en todo punto, con lo que el argumento atomista deja de tener valor.

Las matemáticas griegas evitan el infinito actual. Así, Euclides, considera rectas que pueden ser prolongadas cuanto se quiera, pero no "rectas infinitas". Igualmente, al enunciar que los números primos son infinitos, lo expresa diciendo que *"Hay más números primos que cualquier cantidad de números primos propuesta"*. De esta forma evita considerar el infinito actual de los números primos.

En *Los Elementos* Euclides expone el *método de exhausción* de Eudoxo de Cnido, que se utilizaba para calcular áreas (cuadraturas) de regiones planas. Es frecuente afirmar que este método consiste en una aproximación al área seguida de un proceso límite. No es así. Aunque su nombre sugiere "agotamiento" de una figura plana por polígonos inscritos, el método estaba basado en un razonamiento muy cuidadoso de doble reducción al absurdo (llamado razonamiento *apagógico*), precisamente para evitar la consideración de un infinito actual.

Mención aparte merece Arquímedes. Por una parte, probó en su obra *El arenario* que si el

Universo estuviera completamente lleno de granos de arena, su número sería finito. Para lo cual desarrolla un sistema de numeración apropiado para manejar grandes números (para los griegos el número mayor era la miríada de miríadas, equivalente a 10^8) que le permite describir un número que, en base diez, tendría unos 80000 millones de millones de cifras. Pero también Arquímedes ideó métodos heurísticos[1] que están expuestos en su obra *El Método*, descubierta en 1906, en la que explica cómo anticipó algunos de sus descubrimientos por medio de técnicas de equilibrio usando la ley de la palanca. En estas técnicas, Arquímedes hace un uso muy libre del infinito; por ejemplo, descompone áreas planas como sumas infinitas de segmentos, es decir, reduce un continuo a elementos indivisibles, con lo cual podrían estar de acuerdo los atomistas, pero no Aristóteles.

1.2. El infinito desde la Edad Media hasta el siglo XIX

Es sabido que las religiones lo contaminan todo de irrealidad. Después del triunfo de la Iglesia Católica, las discusiones sobre el infinito adquieren una orientación marcadamente teológica.

San Agustín (354 - 430), filósofo cristiano, admite el infinito actual como atributo de Dios, pero niega que Dios creara nada infinito. En su obra *La Ciudad de Dios* escribe refiriéndose a los números:

> Así que son desiguales entre sí y diferentes; cada uno es finito y todos son infinitos. ¿Y que sea posible que Dios todopoderoso no sepa los números por su infinidad, y que la ciencia de Dios llegue hasta cierta suma de números, y que ignore los demás, quién habrá que pueda decirlo, por más ignorante y necio que sea? [...] Y así que la infinidad de los números para la ciencia de Dios, que la comprende, no puede ser infinita.

En esa insólita cuadratura del círculo que fue la Escolástica, en su intento de conciliar la filosofía de Platón y Aristóteles con la revelación cristiana, destaca Santo Tomás de Aquino (*ca.* 1225 - 1274). La infinitud actual de Dios en todos los sentidos es un dogma Católico y Tomás de Aquino es una autoridad en tan delicada cuestión teológica. En su obra *Summa Contra Gentiles*, Capítulo 43, proporciona catorce argumentos breves para demostrar la infinitud de Dios, cada uno de ellos termina con la letanía *"Por tanto Dios es infinito"*.

Para encontrar ideas más interesantes sobre el infinito debemos referirnos a Galileo Galilei (1564 - 1642). En su obra pionera sobre la dinámica y estática de sólidos *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove science attenenti alla meccanica e i movimenti locali* (1638), Galileo expone algunas paradojas sobre el infinito. Una de ellas es la de la "equivalencia entre una circunferencia y un punto". Para explicarla, consideremos un rectángulo formado por dos cuadrados

[1] Por *método heurístico* se entiende cualquier proceso que facilite anticipar un resultado. Son métodos que se apoyan en alguna forma de intuición que conduce a la formulación de conjeturas razonables, que después deben ser probadas con métodos científicos rigurosos

iguales unidos por un lado común. Recortemos en este rectángulo una semicircunferencia de centro en la mitad del lado superior del rectángulo e igual radio. La figura que resulta de quitar dicha semicircunferencia al rectángulo se gira alrededor de su eje de simetría y se obtiene un sólido de revolución parecido a un cuenco. Supongamos ahora inscrito en dicho sólido un como circular recto cuya base coincide con la del cuenco y de altura igual a la del cuenco.

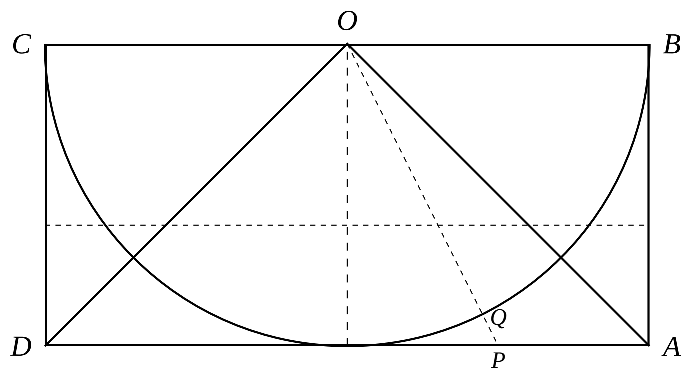


Figura 1. Paradoja circunferencia-punto

Cada plano paralelo a la base del cuenco determina en su intersección con el cono un círculo, y en su intersección con el cuenco una corona circular. Es muy fácil comprobar que dichos círculo y corona circular tienen igual área. Si ahora consideramos planos paralelos a la base del cuenco que se van acercando al borde superior del mismo, las áreas de las intersecciones de dichos planos con el cono y el cuenco son siempre iguales. El último de dichos planos da como intersección con el cuenco una circunferencia (el borde del cuenco) y con el cono un punto (el vértice del cono). Como los límites de cantidades iguales entre sí deben también ser iguales entre sí, Galileo se pregunta por qué no podemos considerar la circunferencia como igual a su centro. Si lo hacemos, llegaremos a la conclusión de que todas las circunferencias son iguales entre sí e iguales a un punto.

La misma figura anterior pone de manifiesto que la semicircunferencia está formada por tantos puntos como los que forman la poligonal $CDAB$. Pues cada semirrecta con origen en O corta a la semicircunferencia en un único punto Q y a la poligonal en otro único punto P. Así podemos emparejar los puntos de la semicircunferencia con los de la poligonal y de esta forma los agotamos todos. Por tanto ambas líneas tienen igual número infinito de puntos. Si llamamos ℓ a la longitud de AB, la semicircunferencia tiene longitud $\pi\ell$, menor que la longitud de la poligonal $CDAB$ que es igual a 4ℓ. Galileo escribe al respecto:

> Estas dificultades son reales; y no son las únicas. Pero recordemos que estamos tratando con infinitos e indivisibles, los cuales trascienden nuestra comprensión finita, los primeros a causa de su magnitud, los últimos debido a su pequeñez.
>
> [. . .] intentamos, con nuestras mentes finitas, discutir sobre el infinito, asignándole propiedades que da-

> mos a lo finito y limitado; pero pienso que esto es incorrecto, dado que no podemos hablar de cantidades infinitas como si fuesen mayores, menores o iguales a otras.

Otra paradoja considerada por Galileo, es la que se deduce de la observación de que para cada número natural n podemos construir un cuadrado de lado n, cuya área es igual a n^2, de donde se deduce que hay tantos números naturales como cuadrados perfectos. Sin embargo la mayoría de los números no son cuadrados perfectos. A la vista de ello, Galileo escribe:

> [...] el total de los números es infinito, y el número de cuadrados es infinito; ni es menor el número de cuadrados que el de la totalidad de números, ni el otro mayor que el anterior; y, finalmente, los atributos "igual", "mayor" y "menor" no son aplicables al infinito, sino solo a cantidades finitas.

Una característica de las matemáticas del siglo XVII es el libre uso del infinito. En los dos primeros tercios del siglo XVII se desarrollan una variedad de métodos infinitesimales que preludian el cálculo diferencial, así como técnicas de cuadraturas basadas en la descomposición de recintos planos o de sólidos en infinitos *elementos indivisibles*. El matemático inglés John Wallis introdujo en 1655 en su obra *De Sectionibus Conicis,* el símbolo del "lazo del amor", ∞, con el significado de "infinito".

La invención del Cálculo, en el último tercio del siglo XVII, ordena y sistematiza estos procedimientos, y proporciona algoritmos generales para resolver multitud de problemas que antes se abordaban con técnicas específicas para cada caso. Las cantidades infinitesimales, los casi imprescindibles infinitésimos, que ya son viejos amigos nuestros, son otra forma del infinito, en este caso, de lo infinitamente pequeño. Durante el siglo XVIII y parte del XIX, los infinitésimos se usaron de forma casi generalizada porque, a pesar de los problemas de todo tipo que planteaban, eran útiles y eficaces para resolver problemas y una herramienta heurística muy apreciada.

1.3. El infinito matemático y el nacimiento de la teoría de conjuntos

A principios del siglo XIX, la actitud de los matemáticos ante el infinito no era diferente a la mantenida por Galileo doscientos años antes. La consideración del infinito actual conducía a paradojas; en particular, la llamada *paradoja de la reflexividad*, es decir, la posibilidad de establecer una biyección entre un conjunto infinito y una parte del mismo, indicaba que la consideración del infinito actual contradecía el principio lógico de que "el todo es mayor que las partes". Para los principales matemáticos de la época, como Gauss y Cauchy, el infinito seguía siendo un infinito potencial, un concepto sin contenido matemático, una palabra que servía para designar un proceso sin punto final. Gauss lo expresó claramente en una carta a su amigo Schumacher en 1831:

> Debo protestar vehementemente contra el uso del infinito como algo completado, pues esto nunca está permitido en matemáticas. El infinito es simplemente una forma de hablar; una forma resumida para la

> afirmación de que existen los límites a los cuales ciertas razones pueden aproximarse tanto como se desee, mientras otras son permitidas crecer ilimitadamente.

La consideración del infinito actual como objeto matemático exige disponer de objetos matemáticos que puedan ser llamados “infinitos”. Que los números naturales son potencialmente infinitos quiere decir que son una sucesión a la que podemos agregar términos indefinidamente, muy diferente es la consideración del infinito actual de todos los números naturales (a lo que estamos ya acostumbrados y no nos causa mayor problema), que equivale a considerarlos como un todo acabado, como un conjunto formado por todos ellos. Esto indica que una teoría matemática del infinito supone la consideración de conjuntos infinitos. Es imposible separar la teoría de conjuntos y la teoría del infinito.

En esto, como en otras cosas, Bernahrd Bolzano fue un adelantado a su tiempo. En su libro *Las Paradojas del Infinito*, publicado en 1851, tres años después de su muerte, Bolzano se propone estudiar las paradojas conocidas y mostrar que, debido a la falta de precisión en el uso del término *infinito*, daban lugar a *aparentes* contradicciones. Es necesario, afirma, definir el término *infinito* y las matemáticas son el contexto apropiado para ello. Naturalmente, Bolzano, está refiriéndose al infinito actual. Con la idea de fundamentar matemáticamente la noción de infinito actual, Bolzano introduce los términos de *agregado*, *conjunto* y *multitud*, siendo en esta obra la primera vez que la palabra “conjunto” es usada con un significado matemático preciso. Un agregado es una totalidad compuesta de objetos bien definidos; un conjunto es un agregado donde el orden de sus partes es irrelevante y donde nada esencial se cambia si solo se cambia el orden (es decir, un agregado sin estructura alguna); una multitud es un conjunto cuyos miembros son individuos de una misma especie.

Bolzano considera un conjunto como un todo, sin necesidad de considerar separadamente cada uno de sus elementos. El ejemplo que propone es muy significativo a este respecto:

> . . . puedo pensar en el conjunto, o agregado, o si se prefiere, en la totalidad de los habitantes de Praga o de Pekín sin formar una representación separada de cada habitante individual.

Bolzano abandona así el punto de vista constructivo, la idea de que un conjunto se va formando a partir de sus elementos mediante alguna clase de algoritmo.

Bolzano define una multitud infinita como aquella de la cual cualquier multitud finita solamente puede ser parte de la misma. Debemos observar que esta definición no es la tradicional en la que infinito es definido como la negación de lo finito. Con respecto a la existencia de conjuntos infinitos, Bolzano afirmó que “el conjunto de todas las verdades absolutas es un conjunto infinito”. Su idea es partir de una proposición que se sabe verdadera a la que podemos llamar A; a partir de ella podemos formar otra “A es verdadera” que, claramente, es diferente de la proposición A y este proceso puede proseguirse indefinidamente.

Bolzano mantiene que el criterio de validez para la existencia de conjuntos infinitos debe basarse en su naturaleza no contradictoria.

> Tan pronto como disponemos de un concepto, A, el cual representa los objetos $a,b,c,d,\dots$ y no otros, es extremadamente fácil llegar a un concepto que represente el agregado de todos estos objetos tomados juntos. Solamente se necesita combinar la idea expresada por la palabra "agregado" y el concepto A, en la manera expresada por las palabras "el agregado de todo A". Esta simple observación, cuya corrección confío que será evidente para todos, elimina todas las dificultades planteadas contra la idea de un conjunto que comprende infinitos miembros.

En otras palabras, lo que Bolzano afirma es que dada cualquier propiedad existe un conjunto cuyos miembros son justamente aquellos objetos que tienen dicha propiedad. Bolzano se propone establecer un criterio de comparación para conjuntos infinitos. La paradoja de la reflexividad no le preocupa tanto como a Galileo; al contrario, el hecho de que pueda establecerse una biyección entre un conjunto y una parte de él le parece "una de las más notables característica de los conjuntos infinitos". Pero en este punto crucial Bolzano no eligió el criterio adecuado.

> ...el conjunto de todas las cantidades entre 0 y 5 (o menores que 5) es claramente infinito, al igual que lo es el conjunto de todas las cantidades menores que 12. Con no menos seguridad es el último conjunto mayor que el primero, pues el primero constituye solamente una parte del último [...] Pero no menos cierto que todo esto es lo siguiente: si x representa una cantidad arbitraria entre 0 y 5, y si fijamos la razón entre x e y por la ecuación $5y = 12x$, entonces y es una cantidad entre 0 y 12; y recíprocamente, siempre que y esté entre 0 y 12, x está entre 0 y 5.

Es decir, Bolzano afirma que la aplicación dada por $y = \dfrac{12}{5}x$ para $x \in [0,5]$ establece una biyección entre dicho intervalo y el intervalo $[0,12]$. Pero, cuando se trata de conjuntos infinitos, a Bolzano no le parece que la existencia de una biyección sea criterio suficiente para afirmar que ambos conjuntos son "equinumerosos" y elige como criterio de comparación la relación de inclusión entre conjuntos. De esta forma puede comparar conjuntos infinitos pero no puede *cuantificar* el infinito y, por tanto, no logra desarrollar, pese a su intento, una aritmética del infinito.

Le estaba reservada a Georg Cantor (1845 - 1918) la gloria de ser el primer matemático que domesticara el infinito. Cantor se vio obligado a defender constantemente sus innovadoras ideas en contra de las opiniones de influyentes matemáticos de su tiempo, alguno de los cuales, como Leopold Kronecker, pasó incluso del ataque científico al ataque personal, si bien otros destacados matemáticos como Weierstrass, Dedekind o Hilbert estuvieron de su parte.

El interés de Cantor por los conjuntos infinitos de puntos y la naturaleza del continuo procede de sus tempranos trabajos en series trigonométricas. En 1869, recién llegado a la universidad de Halle, Cantor, a propuesta de su colega H.E. Heine (1821-1881), se interesó por el problema sobre la unicidad de la representación de una función como una serie trigonométrica. La interpretación dada hasta entonces a dicha representación se basaba en gran parte en que se suponía que era única, y que de hecho la serie trigonométrica era la serie de Fourier de la función. Esta creencia fue puesta en entredicho porque Weierstrass había probado que para integrar término a término una serie se requiere convergencia uniforme.

Consideremos una serie trigonométrica

$$\frac{a_0}{2}+\sum\big(a_n\cos(2n\pi x)+b_n\,\mathrm{sen}(2n\pi x)\big)$$

donde por comodidad consideramos funciones de período 1. El problema de la unicidad equivale a probar que si dicha serie converge puntualmente a cero en $[0,1]$ entonces sus coeficientes son todos nulos. Esto fue probado por Cantor en 1870, y en 1872 generalizó este resultado. Para ello introduce el concepto de punto de acumulación de un conjunto U de números reales, el conjunto de todos los puntos de acumulación de U lo llamó *conjunto derivado* de U y lo representó por U'. Cantor define los sucesivos conjuntos derivados $U^1=U'$, $U^{n+1}=\big(U^n\big)'$, y demuestra que si se supone que la serie converge puntualmente y con suma cero en un conjunto de la forma $[0,1]\setminus U$, donde U es un conjunto tal que para algún $n\in\mathbb{N}$ se tiene que $U^n=\varnothing$, entonces los coeficientes de la serie son todos nulos. Probaba así que el resultado de unicidad permanecía válido incluso si se admitía un conjunto infinito de puntos excepcionales en los que no se supone que haya convergencia siempre que estos puntos estén distribuidos de manera apropiada. En este artículo de 1872, Cantor sentó las bases de la teoría de los conjuntos de puntos y se convenció de que el estudio de los conjuntos infinitos era esencial para clasificar los posibles conjuntos de puntos excepcionales, problema que todavía sigue abierto.

Al principio de este trabajo que estamos comentando, Cantor desarrolló una teoría de los números reales basada en sucesiones de números racionales. Ese mismo año, un poco antes, Dedekind había publicado su teoría de las cortaduras. No es ésta la única ocasión en que coinciden los intereses de Cantor y Dedekind. De hecho, la contribución de Dedekind a la creación de la teoría de conjuntos es mucho más importante de lo que suele reconocerse. En su famoso trabajo *Was sind und was sollen die Zahlen* (*¿Qué son y para qué sirven los números?*) publicado en 1888, Dedekind precisa el significado de las operaciones elementales de la teoría de conjuntos *ingenua*, y da la definición general de función entre conjuntos abstractos, generalizando así la anteriormente dada por Dirichlet para funciones reales. Así mismo Dedekind da la siguiente definición:

> Un sistema S se llama *infinito* cuando es semejante a una parte propia de sí mismo; en caso contrario, se dice que S es un sistema finito.

En términos actuales: un conjunto S es infinito, si hay un subconjunto propio, $\varnothing\subsetneqq A\subsetneqq S$, y una biyección de A sobre S. En una nota a pie de página, Dedekind, afirma haber comunicado esa definición a Cantor ya en 1882 y varios años antes a otros colegas. También fue Dedekind un precursor de las técnicas conjuntistas en Álgebra, introduciendo, entre otros, los conceptos de *cuerpo, ideal* y *módulo*.

Figura 2. Cantor

En una carta a Dedekind, de fecha 29 de noviembre de 1873, Cantor afirmaba, sin incluir prueba alguna, que los racionales positivos y, más generalmente, el conjunto de las sucesiones finitas de enteros positivos, podía ponerse en correspondencia biyectiva con los enteros positivos, y preguntaba si eso mismo se podía hacer con los números reales. Dedekind le respondió, a vuelta de correo, que en su opinión nada se oponía a ello, y añadió, con demostración incluida, que el conjunto de los números algebraicos sí es biyectivo con el de los enteros positivos.

Definición. Los *números algebraicos* son números, reales o complejos, que son raíces de alguna ecuación polinómica con coeficientes enteros. Por tanto, un número real o complejo x es algebraico si hay números enteros $c_k \in \mathbb{Z}$, $(k = 01, 2, \ldots n)$ tal que x satisface la ecuación polinómica

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n = 0$$

Los números que no son algebraicos se llaman *trascendentes*. Todo número racional es evidentemente algebraico, pero también lo son las raíces de cualquier orden de números racionales positivos y muchos más. Intuitivamente, los números algebraicos son los que pueden obtenerse a partir de los enteros por procedimientos algebraicos: suma, producto, cociente, división, raíces, iterados un número finito cualquiera de veces. En ese sentido podemos decir que los números algebraicos no están "muy alejados" de los enteros. Los números trascendentes son justamente lo contrario: son números irracionales "muy alejados" de los enteros.

Hasta 1844 siguió abierta la cuestión sobre si había o no irracionales trascendentes. Ese año, Liouville mostró que cualquier número de la forma

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^{2!}} + \frac{a_3}{10^{3!}} + \cdots + \frac{a_n}{10^{n!}} + \cdots$$

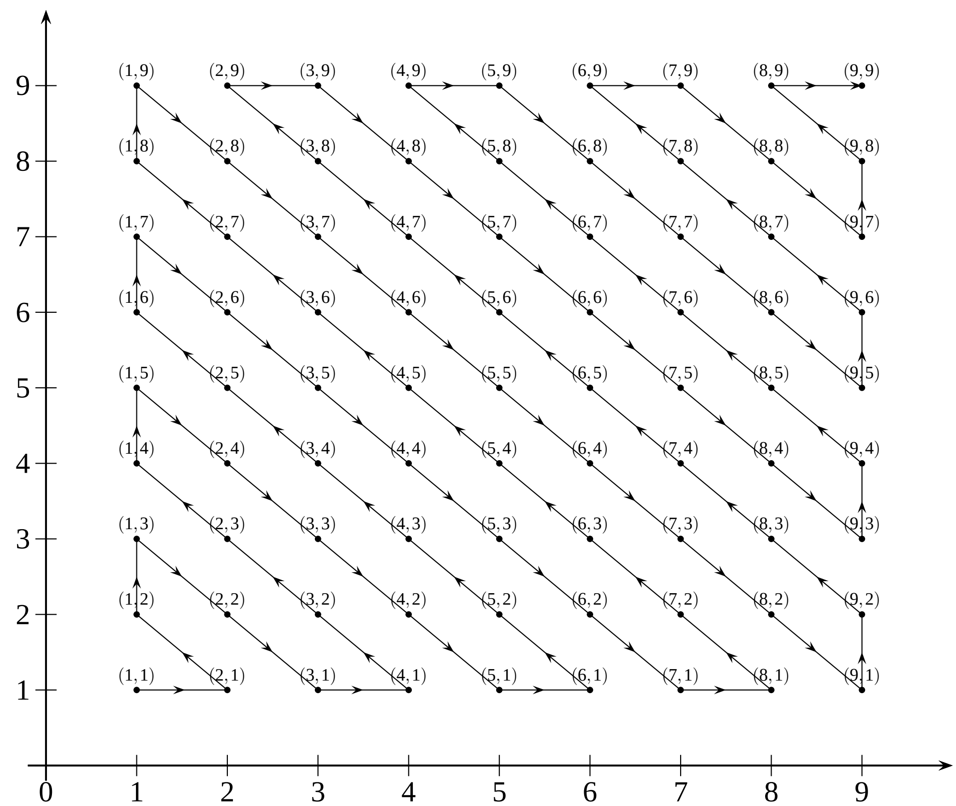
donde para todo $n \in \mathbb{N}$ es $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, es trascendente.

Demostrar que un número concreto es trascendente es difícil. La trascendencia del número e fue demostrada por Charles Hermite en 1873, y Ferdinand Lindemann logró probar la trascendencia de π en 1882 (demostrando así que el problema de la cuadratura del círculo no tenía solución).

Para facilitar la exposición que sigue voy a dar algunas definiciones de conceptos introducidos por Cantor años más tarde.

Definición. Se dice que dos conjuntos A y B son *equipotentes* si existe una aplicación biyectiva de uno de ellos sobre el otro. Un conjunto se llama *numerable* si es vacío o si existe una aplicación inyectiva de él en el conjunto de los enteros positivos.

Es fácil probar que los conjuntos numerables infinitos son precisamente los conjuntos equipotentes al conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. Por tanto, los conjuntos numerables son aquellos conjuntos cuyos elementos se pueden contar ¡aunque sean infinitos! El resultado, citado por Cantor, de que $\mathbb{Q}$ es numerable, no deja de ser muy sorprendente y contrario a la intuición, pues si $r < s$ son números racionales cualesquiera, entre ellos dos hay siempre infinitos números racionales. Pese a ello, no hay más números racionales que números naturales. La siguiente figura indica una forma de enumerar todos los racionales positivos.



En cada diagonal se cuentan las fracciones p/q tales que $p+q$ es constante. Es claro que así se cuentan todas las fracciones positivas.

Poco después de las cartas citadas, Cantor logró demostrar que el conjunto de los números reales no es numerable. Merece la pena recordar la demostración.

Teorema. Dados dos números reales $a < b$ se verifica que el intervalo $[a,b]$ no es numerable.

Demostración. Si $[a,b]$ fuera numerable tendría que ser equipotente a $\mathbb{N}$. Veamos que esto no puede ocurrir. Supongamos que $\varphi : \mathbb{N} \to [a,b]$ es una biyección de $\mathbb{N}$ sobre $[a,b]$. En particular φ es sobreyectiva por lo que deberá ser $[a,b] = \{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Obtendremos una contradicción probando que tiene que existir algún elemento $z \in [a,b]$ tal que $z \notin \{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\}$.

Para ello se procede de la siguiente forma. Dividimos el intervalo $[a,b]$ en tres intervalos cerrados de igual longitud:

$$\left[a, a+\frac{b-a}{3}\right], \quad \left[a+\frac{b-a}{3}, b-\frac{b-a}{3}\right], \quad \left[b-\frac{b-a}{3}, b\right]$$

y llamamos I_1 al primero de ellos (es decir el que está más a la izquierda) que no contiene a $\varphi(1)$. Dividamos ahora el intervalo I_1 en tres intervalos cerrados de igual longitud y llamemos I_2 al primero de ellos que no contiene a $\varphi(2)$.

Este proceso puede "continuarse indefinidamente" pues, supuesto que $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, y que tenemos intervalos cerrados de longitud *positiva* I_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, tales que $I_{k+1} \subset I_k$ para $1 \leqslant k \leqslant n-1$, y $\varphi(k) \notin I_k$ para $1 \leqslant k \leqslant n$, dividimos el intervalo I_n en tres intervalos cerrados de igual longitud y llamamos I_{n+1} al primero de ellos que no contiene a $\varphi(n+1)$. De esta forma para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un intervalo cerrado I_n no vacío verificándose que $I_{n+1} \subset I_n$ y $\varphi(n) \notin I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El principio de los intervalos encajados nos dice que hay algún número real z que está en *todos* los I_n. Por tanto, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, por ser $z \in I_n$ y $\varphi(n) \notin I_n$, se tiene necesariamente que $z \neq \varphi(n)$, esto es, $z \notin \{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\}$ pero, evidentemente, $z \in [a,b]$. $\square$

¿Te recuerda algo la demostración anterior? ¿Quizás a la divisibilidad infinita del continuo? Pues claro, lo que estamos haciendo es dividir infinitas veces un segmento (el prototipo de *continuo*). Lo que nos dice este resultado es que, aunque lo dividamos en un infinito actual de partes, siempre nos quedarán puntos que no habremos tocado. Aristóteles afirmaba que un continuo puede dividirse en cualquier parte pero no en todas partes: hay que darle la razón en este punto.

Es fácil probar que cualquier intervalo no reducido a un punto es equipotente a $\mathbb{R}$. El teorema anterior demuestra que "hay muchos más números irracionales que racionales" pues mientras que podemos enumerar los racionales no podemos hacer lo mismo con los irracionales ya que no hay biyecciones de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Deducimos también la siguiente estrategia *para probar que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ no es vacío es suficiente probar que su complemento $\mathbb{R} \setminus A$ es numerable* (¡con lo cual, de hecho, estamos probando que A es infinito no numerable!).

Puesto que los números algebraicos son un conjunto numerable, deducimos, de forma no constructiva ¡sin dar ni un solo ejemplo!, que en todo intervalo de $\mathbb{R}$, hay infinitos números trascendentes. Compara este razonamiento con el tradicional constructivo seguido años antes por Liouville para probar que hay números trascendentes. Cantor publicó estos resultados, el suyo y el de Dedekind, en un trabajo de tres páginas titulado *Uber eine Eigenshaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen* (*Sobre una propiedad del sistema de todos los números algebraicos reales*)

(1874). Es muy llamativo que el título de este trabajo, considerado como el nacimiento oficial de la teoría de conjuntos, no haga referencia alguna al resultado que hoy consideramos como el principal: la no numerabilidad de $\mathbb{R}$. Además la propia presentación del trabajo elude destacar estos resultados. Posiblemente, Cantor temía la reacción que pudiera provocar un trabajo tan radicalmente innovador. Porque lo que él hacía era probar que en cualquier intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ con $a < b$ hay, en un sentido matemático preciso, más números que todos los números algebraicos juntos, de donde se deducía que en $[a,b]$ tenía que haber números trascendentes. Esta es una demostración de *existencia pura*, algo nuevo en las matemáticas.

Naturalmente, Cantor sabía muy bien que había descubierto una propiedad específica del continuo: su no numerabilidad. Disponía ya de dos tipos de conjuntos infinitos: $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$, claramente $\mathbb{N}$ tenía un tamaño más pequeño que $\mathbb{R}$. Precisar esa idea de tamaño y elaborar una teoría de comparación de conjuntos infinitos es lo que hizo Cantor en los siguientes veinte años y, casi contra su voluntad, se vio llevado a desarrollar la teoría de números transfinitos y la teoría de conjuntos como una disciplina matemática independiente.

En 1877, Cantor probó, para su propia sorpresa, que los puntos del plano podían ponerse en correspondencia biyectiva con $\mathbb{R}$, y, más general, que los espacios $\mathbb{R}^n$ son todos ellos biyectivos a la recta real. Este resultado fue de los que más desconcierto provocó entre los matemáticos contemporáneos.En 1883, en su trabajo *Fundamentos de una teoría general de conjuntos*, escribe:

> La presentación de mis investigaciones hasta la fecha en teoría de conjuntos, ha alcanzado un punto donde su progreso depende de una extensión del concepto de número entero más allá de sus límites actuales. Esta extensión señala en una dirección que, por lo que yo sé, no ha sido investigada por nadie todavía.
>
> [...] Por atrevido que esto pueda parecer, tengo que expresar, no sólo la esperanza, sino también la firme convicción de que esta extensión tendrá que ser considerada con el tiempo como absolutamente simple, adecuada y natural. Pero no se me oculta de ninguna manera el hecho de que en esta empresa me encuentro situado en una cierta oposición a concepciones muy extendidas acerca del infinito matemático, y a opiniones formuladas frecuentemente sobre la naturaleza del número.

En este trabajo Cantor introduce los *números transfinitos* o *cardinales transfinitos*. Por el mismo proceso que podemos abstraer la idea del número 5 como la clase de todos los conjuntos equipotentes a un conjunto cualquiera con cinco elementos, a,b,c,d,e, de la misma forma este proceso permite, dado un conjunto M, por doble abstracción de la naturaleza de sus elementos y del posible orden en que estén dados, asociar a M un objeto matemático, representado por $\sharp M$, que se llama *su número cardinal* o *potencia*, que es el mismo para todos los conjuntos equipotentes a M. Cuando M es finito, $\sharp M$ es el número de elementos de M; la potencia de los conjuntos numerables (infinitos) la representó Cantor por $\aleph_0$ ($\aleph$ es la primera letra del alfabeto hebreo, se pronuncia “alef”); la potencia de la recta real y de cualquier intervalo de la misma, no vacío y no reducido a un punto, se representa por $\mathfrak{c}$ y se llama la *potencia del continuo*.

Cantor define una relación de orden entre números cardinales: si M, N son dos conjuntos, diremos que $\sharp M \preccurlyeq \sharp N$ si existe una biyección de M sobre *una parte* de N. Si, además, no existe ninguna biyección entre ninguna parte de M y la totalidad de N, se escribe $\sharp M \prec \sharp N$. Con esta definición se tiene que $\aleph_0 \prec \mathfrak{c}$. Para números cardinales finitos esta relación de orden es la usual. La demostración de que $\preccurlyeq$ es una relación de orden entre números cardinales está muy lejos de ser fácil. La dificultad estaba en probar la propiedad reflexiva, es decir, si $\sharp M \preccurlyeq \sharp N$ y también $\sharp N \preccurlyeq \sharp M$, entonces es $\sharp M = \sharp N$. Este resultado fue probado en 1898, y se conoce como teorema de Cantor - Bernstein. Se verifica, además, que $\preccurlyeq$ es una relación de orden total, es decir, dados conjuntos M y N se verifica alguna de las relaciones $\sharp M \preccurlyeq \sharp N$ o $\sharp N \preccurlyeq \sharp M$. La demostración de este resultado exige usar el axioma de elección, también llamado axioma de Zermelo.

Todos esto está muy bien, pero ¿cuántos números cardinales infinitos hay? Hasta ahora solamente conocemos dos. Cantor ideó un procedimiento por el cual, dado un conjunto M, se puede construir un conjunto cuyo cardinal es estrictamente mayor. Para ello, definió el conjunto $\mathcal{P}(M)$ como el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de M

$$\mathcal{P}(M) = \{A : A \subset M\}$$

Teorema. No existe una biyección entre M y $\mathcal{P}(M)$. Es decir, se verifica que:

$$\sharp M \prec \sharp \mathcal{P}(M).$$

Demostración. Supongamos, para obtener una contradicción, que $\psi : M \to \mathcal{P}(M)$ es una biyección. Sea $A = \{x \in M : x \notin \psi(x)\} \in \mathcal{P}(M)$. Como ψ es una biyección existirá un $a \in M$ tal que $\psi(a) = A$. Y tenemos que: $a \in \psi(a)$ si, y sólo si, $a \notin \psi(a)$. □

Suele escribirse $\sharp \mathcal{P}(M) = 2^{\sharp M}$, igualdad que, para el caso de conjuntos finitos, es conocida.

Por tanto, los conjuntos

$$\mathcal{P}(M), \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(M)\big), \mathcal{P}\left(\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(M)\big)\right) \ldots$$

tienen todos ellos distinto número cardinal.

Cantor siguió desarrollando sus ideas en una serie de seis trabajos publicados en los años 1878 a 1884. El desarrollo de la teoría de conjuntos condujo a algunas contradicciones, las llamadas *paradojas de la teoría de conjuntos*. Ello era debido al punto de vista ingenuo adoptado respecto a los conjuntos. Se pensaba que cualquier *propiedad matemática*, $P(x)$, definía su correspondiente conjunto, a saber, el formado por los elementos para los cuales dicha propiedad es verdadera. Por "propiedad matemática", $P(x)$, se entendía cualquier expresión simbólica bien formada que tenga libre la variable x. Esto se conoce como *axioma de abstracción*. La primera formulación explícita del mismo fue hecha por Gottlob Frege (1848-1925) en 1893 en su obra *Grundgesetze der Arithmetik* ("Leyes Básicas de la Aritmética"). En 1902, estando en imprenta el segundo volumen de la obra citada, recibió una carta de Bertrand Russell (1872-1970) en la que mostraba la siguiente contradicción derivada de dicho axioma. Consideremos la siguiente propiedad $P(x) = x \notin x$ y definamos el conjunto $W = \{x : x \notin x\}$. Entonces resulta que si $W \in W$ es porque $W \notin W$ y si $W \notin W$ debe ser $W \in W$. Una contradicción insalvable, conocida como la *paradoja de Russell*. Otra paradoja, conocida como *paradoja de Cantor*, resulta de la consideración del *conjunto de todos los conjuntos*, pues si llamamos $U = \{x : x = x\}$ a dicho conjunto universal que contiene a cualquier conjunto, entonces $\mathcal{P}(U) \subset U$ por lo que $\sharp\mathcal{P}(U) \preccurlyeq \sharp U$ lo que contradice el resultado antes visto. Estas paradojas son de tipo lógico.

Surgieron otras paradojas de tipo semántico y se derivan de la capacidad del lenguaje para referirse a sí mismo. Una de las más conocidas es la de Berry (1906): Existen muchas expresiones en castellano que permiten describir números naturales, cada una de ellas consta de un número finito de caracteres gramaticales: letras, comas,... Considera la expresión: *"sea x el menor número natural que no puede ser descrito con menos de cien caracteres"*. Resulta que dicha expresión describe con menos de cien caracteres a un número que no puede ser así descrito.

La solución fue axiomatizar la teoría de conjuntos para evitar que pudieran formularse paradojas como las anteriores lo que, para evitar las paradojas de tipo semántico, obliga al uso de un lenguaje formalizado y, para evitar las de tipo lógico, a restringir de alguna forma la existencia de conjuntos "demasiado grandes" como los conjuntos W y U anteriores. Observa que el axioma de abstracción es en realidad un *esquema axiomático* ya que para cada elección de la propiedad $P(x)$ resulta un axioma afirmando la existencia de un cierto conjunto. Zermelo (1871-1953) propuso modificar dicho axioma debilitándolo de la manera siguiente:

> *Para toda propiedad $P(x)$ definible en la teoría y para todo conjunto A, existe un conjunto B cuyos elementos son exactamente aquellos $x \in A$ que cumplen $P(x)$.*

Es decir, Zermelo postula la existencia del conjunto $B = \{x \in A : P(x)\}$.

Este esquema axiomático de Zermelo permite obtener conjuntos a partir de otros, y cuyo tamaño es menor que el de aquellos de los que han sido obtenidos. Esto implica que, necesariamente, para formar un conjunto debemos partir de otro previamente dado. Por ello hay que añadir otros axiomas que garantizan la existencia de aquellos conjuntos necesarios que no pueden obtenerse como subconjuntos de otros conjuntos dados. Esto ha dado lugar a la teoría axiomática de Zermelo-Fraenkel.

En la teoría de Zermelo-Fraenkel, la no existencia de un conjunto W tal que $x \in W$ si, y sólo si $x \notin x$ es un *teorema*. Pues si un tal conjunto existiera se llega a la contradicción de que $W \in W$ si, y sólo si $W \notin W$. Observa que ni siquiera es posible considerar en esta teoría algo como

$W = \{x : x \notin x\}$. Por tanto, tampoco existe en esta teoría un conjunto universal U, ya que si tal conjunto existiera también existiría el conjunto $W = \{x \in U : x \notin x\}$, lo que acabamos de ver que es contradictorio.

Observa que no podemos definir el "complementario absoluto" de un conjunto A, es decir, no existe un conjunto A^c cuyos elementos sean los conjuntos que no pertenecen a A. Si existiera, entonces también existiría el conjunto $U = A \cup A^c$ cuya existencia acabamos de ver que lleva a contradicción.

Las operaciones con números transfinitos se definen con facilidad por medio de las correspondientes operaciones conjuntistas. Por ejemplo, el producto $\sharp M \cdot \sharp N$ es, por definición, igual a $\sharp(M \times N)$ donde $M \times N$ es el conjunto producto cartesiano de M y N. Análogamente se define la suma $\sharp M + \sharp N$ como el número cardinal de la unión disjunta de M y N. Estas operaciones son asociativas, conmutativas y distributivas pero, para cardinales transfinitos se cumple que

$$\sharp M + \sharp N = \sharp M \cdot \sharp N = \text{máx}\{\sharp M, \sharp N\}$$

Esto es, la aritmética transfinita no responde a las reglas usuales de la aritmética finita. Pero esto no quiere decir que sea contradictoria, simplemente, es diferente.

El trabajo de Cantor cambió la forma de ver las matemáticas y acabó por ser ampliamente aceptado. La visión que Cantor tenía de las matemáticas puras es muy hermosa; para él, las matemáticas puras son el reino de la libertad y las llamaba "matemáticas libres", porque son una creación de la libertad del espíritu humano cuyas únicas limitaciones son la coherencia y la no contradicción.

Referencias

[1] Ralph E. Kenyon, Jr. Atomism and Infinite Divisibility. *http://www.xenodochy.org/rekphd/index.html*, 1994. 5